



CORINT

**Camelia Elena Neța
Ciprian Constantin Neța**

MATEMATICĂ

Manual pentru clasa a VI-a

CUVÂNT-ÎNAINTE

„Când am pornit la scrierea acestui manual, prima întrebare pe care ne-am pus-o a fost: Cui se adresează manualul? Nu a fost o hotărâre ușor de luat, mai ales că, acolo unde sunt mai multe persoane, sunt desigur și multe păreri. Am hotărât până la urmă ca manualul nostru să se adreseze în același timp și elevilor, și părinților, și profesorilor.”

Extras din PREFAȚA manualului de matematică pentru clasa a V-a

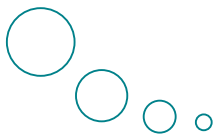
Păstrând ca linie directoare aceeași idee, manualul pentru clasa a VI-a vine ca o continuare naturală, firească, la ceea ce am realizat în manualul pentru clasa a V-a. Prin modul de introducere a noțiunilor am intenționat (și sperăm că am și reușit) să optimizăm raportul dintre *înțelegerea intuitivă* de către elevi a acestor noțiuni și formarea unei *gândiri matematice* specifice noțiunilor prezentate. Și pentru ca aceste noțiuni să nu rămână la nivelul unei înțelegeri superficiale, le-am întărit prin exemple, le-am argumentat și corelat cu noțiunile cunoscute, dar și cu realitatea înconjurătoare.

Prin activitățile practice, dar și prin provocările lansate odată cu introducerea construcțiilor geometrice, ne-am propus să folosim curiozitatea înnăscută a elevului pentru a-l familiariza cu figurile geometrice, pentru a-i consolida deprinderile de utilizare a instrumentelor geometrice, dar și pentru a-l iniția în tainele rezolvării problemelor de geometrie pe bază de raționament.

Manualul poate fi o bună sursă de inspirație pentru profesorii la început de carieră (și nu numai), pentru că am încercat să construim cartea sub forma unui îndrumar, care să le ghideze pașii în parcurgerea etapelor unei lecții, care să le sugereze tipuri de exerciții care pot fixa noțiunile și, eventual, să le sugereze numărul exercițiilor care pot fi rezolvate într-o oră și a celor care pot fi propuse ca temă pentru acasă, o temă care să nu aglomereze după-amiaza elevului.

Lucrarea respectă în totalitate programa școlară aprobată prin OM nr. 3393 din 2017, a primit aviz științific și a fost admisă în urma evaluării Centrului Național de Evaluare și Examinare. Manualul este aprobat în vederea utilizării în sistemul de învățământ, începând cu anul școlar 2018-2019, prin OMEN nr. 3970 din 15.06.2018.

Autorii



Cu Editura Corint viitorul este mai aproape de tine!

Și în acest manual, ca și în manualul de matematică pentru clasa a V-a, ai posibilitatea de a accesa filmulețe matematice cu ajutorul codurilor QR. Nu ai nevoie decât de un dispozitiv mobil dotat cu cameră video și acces la internet, de exemplu un smartphone, și de instalarea unei aplicații pentru scanarea codurilor QR. Ai astfel la dispoziție o metodă plăcută și captivantă de transmitere a informației, care te va ajuta să înțelegi și să înveți mai ușor matematica.

Mult succes!



MULȚIMI. MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE

Mulțimi

Mirela face ordine în camera ei și a adunat în mijlocul camerei mai multe obiecte. Pentru a le așeza la locul lor, mai întâi vrea să le grupeze. Ea aranjează obiectele în 3 grupe astfel:

- prima grupă conține: 3 manuale, 2 culegeri de probleme și 4 cărți de citit;
- a doua grupă conține: 2 fuste, o rochie și o pereche de pantaloni;
- a treia grupă conține 4 păpuși, un ursuleț de pluș și un trenuleț de jucărie.

Prima grupă este o *mulțime* de cărți și le ordonează în bibliotecă. A doua grupă este o *mulțime* de haine și le aranjează în dulap, iar a treia grupă este o *mulțime* cu jucării și este aranjată în cutia de jucării. Spunem că Mirela a aranjat obiectele din mijlocul camerei în 3 *mulțimi*, în funcție de utilitatea lor.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

- ❖ *Mulțimea* este o colecție (grup, ansamblu, grămadă) de mai multe *obiecte distincte* care au o proprietate comună. Obiectele se numesc *elementele mulțimii*.
- ❖ Mulțimile se notează cu litere mari: $A, B, C, D, \dots$; elementele mulțimii se notează cu litere mici.

O mulțime poate fi reprezentată:

- prin enumerarea elementelor și scrierea acestora între două acolade.

- printr-o proprietate caracteristică comună tuturor elementelor mulțimii.

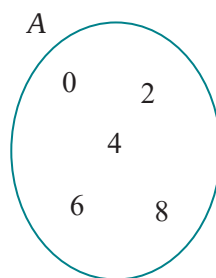
- grafic, încadrând elementele în interiorul unei curbe închise (cerc, oval), numită *diagrama Venn-Euler*.

❖ Considerăm *mulțimea cifrelor pare* și o reprezentăm prin cele trei metode (mulțime numerică):

$$A = \{0, 2, 4, 6, 8\}.$$

$$A = \{x \mid x \text{ cifră pară}\}$$

- citim: *mulțimea elementelor x cu proprietatea că x este cifră pară*;
- semnul „ $\mid$ ” este citit: *cu proprietatea*.

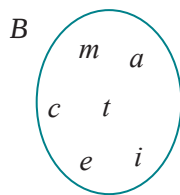


$B = \{m, a, t, e, i, c\}$.

• chiar dacă unele litere se repetă în cuvânt, în mulțime apar o singură dată scrise.

$B = \{x \mid x \text{ este literă în cuvântul } \textit{matematica}\}$

• citim: *mulțimea elementelor x cu proprietatea că x este literă în cuvântul *matematica*.*



Primul matematician care a vorbit despre mulțimi a fost G. Cantor (1845-1918) în ceea ce numim astăzi *teoria naivă a mulțimilor*.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

- ❖ Dacă un element x face parte dintr-o mulțime A , se scrie $x \in A$ și se citește „ x aparține lui A ”.
- ❖ Dacă un element y nu se găsește într-o mulțime B , se scrie $y \notin B$ și se citește „ y nu aparține lui B ”.
- ❖ Într-o mulțime, fiecare element se scrie o singură dată. Ordinea în care se scriu elementele nu contează, însă la mulțimile numerice, în general, vom scrie numerele în ordine crescătoare (pentru a observa mai ușor dacă am scris toate elementele).
- ❖ Mulțimea care nu are niciun element se numește *mulțime vidă* și se notează $\emptyset$.

Semnul „ $\in$ ” reprezintă scrierea stilizată a primei litere din cuvântul grecesc „ $\epsilon \sigma \tau \nu$ ” (este) și a fost folosit prima dată de matematicianul italian G. Peano (1858-1932).



EXERSĂM ÎMPREUNĂ:

➤ Fie mulțimea $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Elementele mulțimii sunt numerele 0, 1, 2, 3 și 4. Putem scrie în relații astfel: $0 \in A$, $1 \in A$, $2 \in A$, $3 \in A$ și $4 \in A$. Numerele 5 și 6 nu sunt în mulțimea A . Scriem în relații: $5 \notin A$, $6 \notin A$.

➤ Se dau mulțimile $A = \{0, 1, 2\}$ și $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Copiați tabelul în caiete și completați al doilea rând după model, specificând dacă afirmațiile sunt adevărate sau false:

$1 \in A$	$2 \notin A$	$0 \in A$	$0 \in B$	$2 \in B$	$10 \in B$	$6 \in B$	$4 \notin B$	$8 \notin B$	$12 \in B$	$12 \in \emptyset$
adevărat	fals									

➤ Enumerați elementele mulțimilor următoare: mulțimea A a multiplilor lui 2 care sunt cifre și mulțimea B a numerelor pare mai mici decât 9.

Rezolvare: $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$.

Observăm că cele două mulțimi au aceleași elemente.

SĂ ÎNVĂȚĂM!

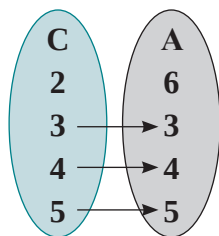
- ❖ Două mulțimi A și B sunt *egale* dacă sunt formate din aceleași elemente. Se notează $A = B$.
- ❖ Dacă două mulțimi sunt egale, atunci orice element care aparține mulțimii A este și element al mulțimii B și, reciproc, orice element al mulțimii B este și element al mulțimii A .
- ❖ Dacă cel puțin un element al mulțimii A nu aparține mulțimii B , sau invers, se spune că mulțimile A și B sunt *diferite*. Se notează $A \neq B$.



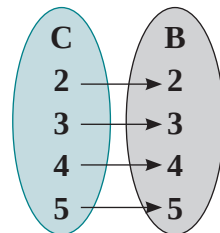
EXERSĂM ÎMPREUNĂ:

➤ Fie mulțimile $A = \{x \mid x \text{ număr natural}, 2 < x \leq 6\}$, $B = \{x \mid x \text{ număr natural}, 2 \leq x < 6\}$ și $C = \{2, 3, 4, 5\}$. Sunt egale mulțimile date?

Rezolvare: $A = \{3, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$, $C = \{2, 3, 4, 5\}$.



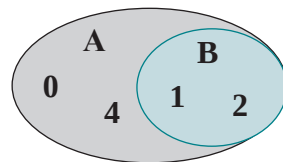
Mulțimile C și B au aceleași elemente, deci $C = B$. Observăm în diagrama Venn-Euler că mulțimile C și B sunt egale prin corespondența cu săgeți.



În mulțimea A nu avem elementul 2, care este în celelalte mulțimi, și avem în plus elementul 6. Deci $A \neq C$, pentru că numărul 2 din mulțimea C nu se regăsește în mulțimea A . Așadar, chiar dacă A și C au același număr de elemente ele nu sunt egale. La fel și $B \neq C$.

➤ Fie mulțimile A și B din figură. În ce mulțime se găsesc elementele 0, 1, 2, 4?

Rezolvare: Observăm din figură că $A = \{0, 1, 2, 4\}$ și $B = \{1, 2\}$, deci $0 \in A$, $0 \notin B$, $4 \in A$, $4 \notin B$, $1 \in A$, $1 \in B$, $2 \in A$, $2 \in B$. Așadar putem spune că elementele din mulțimea B sunt și în mulțimea A , dar în mulțimea A sunt elemente care nu sunt și în mulțimea B .



SĂ ÎNVĂȚĂM!

- ❖ O mulțime B este *inclusă* într-o mulțime A dacă orice element al mulțimii B aparține și mulțimii A . Se notează $B \subset A$. Putem spune și că mulțimea A *include* mulțimea B și se notează $A \supset B$. Mulțimea B se numește *submulțime* a mulțimii A .
- ❖ Dacă cel puțin un element al mulțimii B nu este și element al mulțimii A , se spune că mulțimea B *nu este inclusă* în mulțimea A și se folosește notația $B \not\subset A$.



OBSERVĂM:

- ✓ Mulțimea vidă este inclusă în orice mulțime.
- ✓ Orice mulțime este inclusă în ea însăși (*reflexivitatea*), $A \subset A$.
- ✓ Dacă A și B sunt două mulțimi astfel încât $A \subset B$ și $B \subset A$, atunci $A = B$ (*antisimetria*).
- ✓ Dacă A , B și C sunt trei mulțimi astfel încât $A \subset B$ și $B \subset C$, atunci $A \subset C$ (*tranzitivitatea*).



EXERSĂM ÎMPREUNĂ:

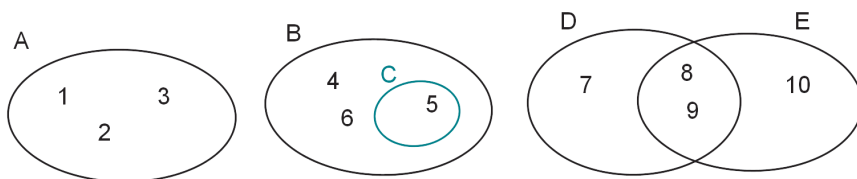
➤ Fie mulțimile $A = \{0, 2\}$, $B = \{0, 3, 6\}$, $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Arătați că $A \subset C$, $B \subset C$, $A \not\subset B$ și $C \not\subset A$.

Rezolvare: Cum $0 \in A$, $2 \in A$ și $0 \in C$, $2 \in C$, spunem că $A \subset C$.

$0 \in B$, $3 \in B$, $6 \in B$ și $0 \in C$, $3 \in C$, $6 \in C$ spunem că $B \subset C$.

Elementul $2 \in A$ și $2 \notin B$, deci $A \not\subset B$; $C \not\subset A$ pentru că $3 \in C$ și $3 \notin A$.

➤ Scrieți elementele fiecărei mulțimi din figură. Sunt mulțimi în relație de incluziune?



Rezolvare: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$, $C = \{5\}$, $D = \{7, 8, 9\}$, $E = \{8, 9, 10\}$; $C \subset B$.

Putem spune și că $\emptyset$ este inclusă în fiecare dintre mulțimile date și că oricare dintre mulțimi este inclusă în ea însăși.





EXERSAȚII SINGURI!

1. Scrieți mulțimea literelor din care este alcătuit cuvântul „paralelipiped” folosind cele trei moduri de reprezentare a unei mulțimi.

2. Scrieți mulțimea $A = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128\}$ cu ajutorul unei proprietăți caracteristice.

3. Următoarele mulțimi sunt reprezentate prin enumerare. Reprezentați-le și prin celelalte două moduri: $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $C = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $D = \{1, 3, 9\}$, $E = \{0, 4, 8\}$, $F = \{0, 5\}$.

4. Enumerați elementele mulțimilor:

$A = \{l \mid l \text{ literă în cuvântul „picior”}\};$

$B = \{x \mid x \text{ număr natural, } 2^x \leq 16\};$

$C = \{x \mid x \text{ număr natural, } 7 < x \leq 11\};$

$D = \{\overline{ab} \mid \overline{ab} \text{ divizibil cu } 5, a \text{ cifră impară}\}.$

5. Stabiliți care dintre relațiile de mai jos sunt adevărate și care sunt false:

a) $\{1, 2, 3\} = \{12, 3\};$

b) $\{0, 1\} \subset \{0, 1, 2, 3\};$

c) $\emptyset = \{0\};$

d) $\{0, 5\} \subset \{0, 4, 5\};$

e) $\emptyset \subset \{0\};$

f) $\{45, 54\} \subset \{4, 5\}.$

6. Determinați numărul natural n știind că:

a) $\{1, n, 3\} = \{1, 2, 3\};$

b) $\{2, n\} \subset \{0, 1, 2, 3\};$

c) $\{3, 6, 9\} \supset \{3n\};$

d) $\{n^2, 5\} \subset \{0, 4, 5\};$

e) $\{1, n, n+1\} \subset \{1, 4, 5\}.$

7. Fie mulțimea $A = \{5, 7, 9\}$. Scrieți toate submulțimile mulțimii A și formați o mulțime cu acestea.

Indicație: Nu uitați să scrieți și mulțimea vidă. Trebuie să obțineți 8 submulțimi.

În general, dacă A este o mulțime care are n elemente, ea are 2^n submulțimi.



Mulțime, mulțimi, s. f.

1. (La sg., adesea cu determinări) Număr mare de ființe sau de lucruri, cantitate mare.

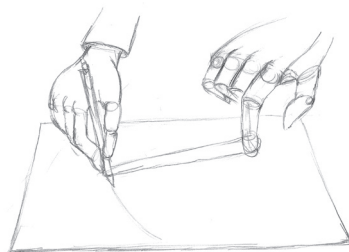
2. (La sg.) Lume multă strânsă laolaltă, grămadă de oameni; spec. masele largi ale populației; colectivitate.

(DEX)

Cercul

ACTIVITATE PRACTICĂ

Deasupra unui polistiren puneți o coală de hârtie albă pe care o prindeți în colțuri cu bol-duri. Notați pe foaie un punct O . Luați o bucată de ață, puneți-o în două și înnodeați-i capetele. Agățați partea înnodată cu un deget și fixați poziția acestuia în punctul O , introduceți un creion între cele două fire și întindeți ața. Având grijă ca firul să stea tot timpul întins, trasați cu creionul o linie curbă, până ce aceasta se *închide*.



SĂ ÎNVĂȚĂM!

- ❖ Fiind dat un punct O și un număr r , se numește *cerc de centru O și rază r* mulțimea punctelor din plan situate la distanța r față de O .
Notăm: $C(O, r) = \{M \text{ din plan} \mid OM = r\}$ și citim *cercul de centru O și rază r* .
Segmentul care unește centrul cercului cu un punct al cercului se numește *rază*.
Prin *rază* înțelegem și lungimea acestui segment.
- ❖ Altfel spus: *Cercul este figura geometrică alcătuită din toate punctele din plan care se află la aceeași distanță față de un punct fix, numit centru.*

rază = radius (spîță) – din limba latină

Cum desenăm un cerc:

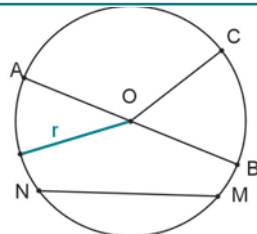
Cercul se desenează cu ajutorul compasului. Compasul este compus din două *brațe* îmbinate la un capăt. Unul dintre brațe are la capăt un ac, iar celălalt are un creion (sau un alt instrument de trasat). *Deschidem* compasul cu lungimea razei pe care o dorim – adică distanța dintre ac și vârful creionului să fie egală cu r . Fixăm acul compasului într-un punct O și cu vârful creionului pe hârtie imprimăm compasului o mișcare de *rotație* completă, fără ca în timpul mișcării compasul să se *deschidă* sau să se *închidă*. Vârful creionului va descrie figura geometrică numită *cerc*.



SĂ ÎNVĂȚĂM!

În figura alăturată este desenat un cerc cu centrul în O și rază r .

- ❖ Segmentele OA , OB , OC sunt *raze* în cerc. Ele sunt segmente congruente. Și segmentele OM și ON sunt raze, chiar dacă nu sunt desenate.
- ❖ Un segment care unește două puncte de pe cerc se numește *coardă*. Segmentele MN și AB sunt coarde ale cercului.
- ❖ O coardă ce conține centrul cercului se numește *diametru*. Capetele diametrului se numesc puncte *diametral opuse*. Segmentul AB este un diametru și este format din două raze. Lungimea oricărui diametru este $2r$.
- ❖ Dacă două cercuri au raze egale, atunci ele se numesc *cercuri congruente*.



EXERSĂM ÎMPREUNĂ:

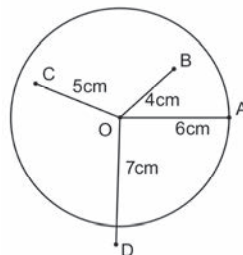
➤ Desenați $C(O, 5\text{cm})$ și punctele A , M , N , știind că: $OA = 5\text{cm}$, AM este coardă, dar nu diametru, $MN = 10\text{cm}$ și $N \in C(O, 5\text{cm})$.

Rezolvare: OA este o rază; M este și el pe cerc pentru că AM este coardă; pentru că M și N sunt pe cerc, înseamnă că MN este coardă, iar pentru că $MN = 10\text{cm}$ înseamnă că este diametru.

➤ Desenați un cerc cu centrul în punctul O și raza $r = 6\text{cm}$ și punctele A , B , C , D astfel încât: $OA = 6\text{cm}$, $OB = 4\text{cm}$, $OC = 5\text{cm}$ și $OD = 7\text{cm}$.

Rezolvare: OA este egală cu raza cercului, deci punctul A se află pe cerc;

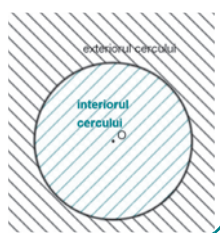
- $OB < r$ și $OC < r$, deci punctele B și C sunt situate în interiorul cercului;
- $OD > r$, deci punctul D este situat în exteriorul cercului.



SĂ ÎNVĂȚĂM!

Fiind dat cercul $C(O, r)$:

- ❖ mulțimea punctelor M din plan pentru care $OM < r$ formează *interiorul cercului* și se notează $IntC(O, r)$.
- ❖ mulțimea punctelor N din plan pentru care $ON > r$ formează *exteriorul cercului* și se notează $ExtC(O, r)$.



CUPRINS

Cuvânt înainte	3	MULȚIMEA NUMERELOR ÎNTREGI	
RECAPITULARE DIN CLASA a V-a		Mulțimea numerelor întregi. Opusul unui număr întreg. Reprezentarea pe axa numerelor	89
Numere naturale. Frații ordinare.		• Modulul unui număr întreg	
Frații zecimale	5	• Compararea și ordonarea numerelor întregi	
Teste de evaluare	10	Adunarea și scăderea numerelor întregi	95
Geometrie	12	• Adunarea numerelor întregi	
Test de evaluare	15	• Scăderea numerelor întregi	
Test inițial clasa a VI-a	16	Înmulțirea numerelor întregi	100
MULȚIMI. MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE		Împărțirea numerelor întregi când deîmpărțitul este multiplu al împărțitorului	103
Mulțimi	19	Puterea cu exponent număr natural a unui număr întreg nenul	106
Mulțimi finite. Mulțimi infinite	24	• Reguli de calcul cu puteri	
• Cardinalul unei mulțimi finite		Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor	110
• Mulțimea numerelor naturale		<i>Probleme recapitulative</i>	111
Operații cu mulțimi	28	<i>Teste de evaluare</i>	112
<i>Probleme recapitulative</i>	31	Ecuatii	113
<i>Teste de evaluare</i>	32	Inecuații în $\mathbb{Z}$	117
Descompunerea numerelor naturale în produs de puteri de numere prime...	34	Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor sau al inecuațiilor	121
Determinarea celui mai mare divizor comun și a celui mai mic multiplu comun. Numere prime între ele	37	<i>Test de evaluare</i>	124
Proprietăți ale relației de divizibilitate în $\mathbb{N}$	43	MULȚIMEA NUMERELOR RAȚIONALE	
<i>Probleme recapitulative</i>	47	Mulțimea numerelor raționale. Opusul unui număr rațional. Reprezentarea pe axa numerelor	125
<i>Teste de evaluare</i>	49	• Modulul unui număr rațional	
RAPOARTE. PROPORȚII		• Compararea și ordonarea numerelor raționale	
Rapoarte	51	Adunarea și scăderea numerelor raționale	131
Proporții	56	Înmulțirea și împărțirea numerelor raționale	134
Proporții derivate	61	Puterea cu exponent număr întreg a unui număr rațional nenul	137
Șir de rapoarte egale	64		
Mărimi direct/invers proporționale ..	67		
• Mărimi direct proporționale			
• Mărimi invers proporționale			
Regula de trei simplă	72		
<i>Probleme recapitulative</i>	75		
<i>Teste de evaluare</i>	77		
Elemente de organizare a datelor ...	79		
Probabilități	84		

• Reguli de calcul cu puteri	
• Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor	
Ecuatii	143
• Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor	
<i>Probleme recapitulative</i>	148
<i>Teste de evaluare</i>	151

NOȚIUNI GEOMETRICE FUNDAMENTALE

Recapitulare – Unghiuri	155
Unghiuri opuse la vârf; congruența lor	157
Unghiuri formate în jurul unui punct, suma măsurilor lor	161
Unghiuri complementare, unghiuri suplimentare	165
Unghiuri adiacente. Bisectoarea unui unghi	169
Drepte paralele	175
• Unghiuri formate de două drepte cu o secantă	
• Axioma paralelelor. Criterii de paralelism	
Drepte perpendiculare în plan	183
Mediatoarea unui segment	188
<i>Teste de evaluare</i>	193
Cercul	194

Pozițiile unei drepte față de un cerc.	
Pozițiile relative a două cercuri	202

TRIUNGHIUL

Triunghiul: definiție, elemente; clasificare; perimetru	207
Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi. Unghi exterior unui triunghi, teorema unghiului exterior	213
Construcția triunghiurilor: cazurile LUL, ULU, LLL	216
Linii importante în triunghi	222
• Bisectoarele unghiurilor unui triunghi	
• Mediatoarele laturilor unui triunghi	
• Înălțimile unui triunghi	
• Medianele unui triunghi	
Congruența triunghiurilor oarecare. Criterii de congruență a triunghiurilor: LUL, ULU, LLL	229
Metoda triunghiurilor congruente ...	235
Proprietăți ale triunghiului isoscel ..	243
Proprietăți ale triunghiului echilateral .	247
Proprietăți ale triunghiului dreptunghic	251
<i>Probleme recapitulative</i>	257
<i>Teste de evaluare</i>	260
<i>Indicații și răspunsuri</i>	261